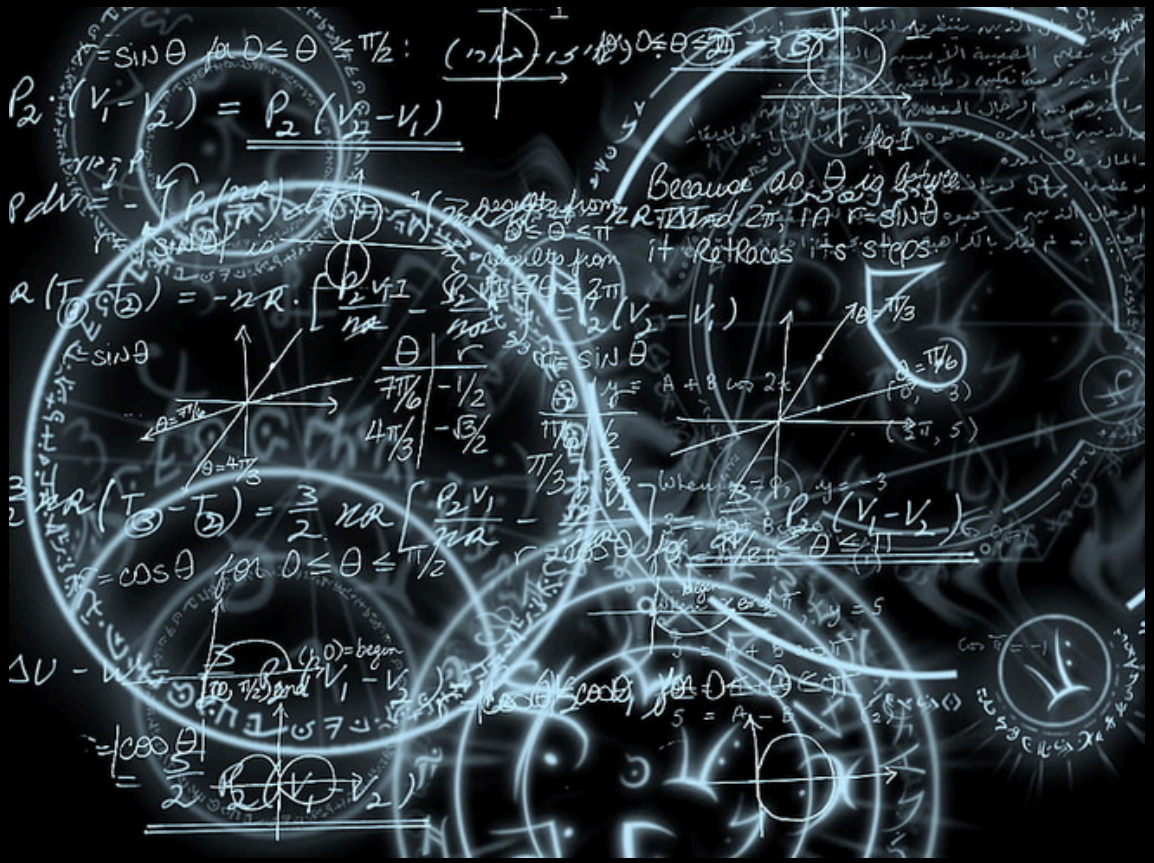
MATH PROJECT

เอกสารประกอบการเรียน
วิชาโครงงานคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค20101



หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ความหมายของคณิตศาสตร์

จัดทำโดย กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ Best Friend Forever School

แนะนำผู้สอน

พิชญุตม์ ราชเดิม (PunPitchy)

นักเรียนโรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ตรัง

ประวัติ ผลงานทางด้านคณิตศาสตร์

ช่วงประถมศึกษา

-รางวัลเหรียญเงินในการแข่งขันจินตคณิตชิงแชมป์ภาคใต้

-อันดับต้นๆการแข่งขันศิลปหัตถกรรมคิดเลขเร็วตั้งแต่ประถมศึกษาปีที่สอง

-อันดับหนึ่ง การแข่งขันอัจฉริยภาพทางคณิตศาสตร์และการคิดเลขเร็วภายในโรงเรียน ช่วงชั้นประถมศึกษาตอนปลาย

ช่วงมัธยมศึกษา

-อันดับ 4 ของจังหวัดในการสอบสมาคมคณิตศาสตร์

-เหรียญทองแดงในการสอบคณิตศาสตร์ TMC

-เข้าค่ายวิชาการคณิตศาสตร์ประเทศไทย (TMAC) และได้รางวัลเหรียญเงินจากการสอบคัดเลือกตัวแทนไปแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ

-รางวัลเหรียญทองการสอบคณิตศาสตร์ ASMO

เรื่องที่ 1
คณิตศาสตร์คืออะไร

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{-\sqrt[2]{4}}\cos(180^\circ)$$

<u>คณิตศาสตร์</u> เป็นศาสตร์ที่ครอบคลุมการค้นคว้าเกี่ยวกับ ปริมาณ โครงสร้าง การเปลี่ยนแปลง และ ปริภูมิ คณิตศาสตร์ไม่มีคำนิยามที่เป็นที่ยอมรับกันทั่วไปกล่าวคร่าว ๆ ได้ว่าคณิตศาสตร์นั้นสนใจ "รูปร่างและจำนวน" และเนื่องจากคณิตศาสตร์มิได้สร้างความรู้ผ่านกระบวนการทดลอง บางคนจึงไม่จัดว่าคณิตศาสตร์เป็นสาขาของ วิทยาศาสตร์

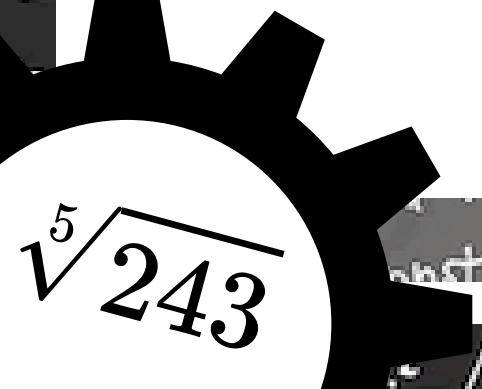
คณิตศาสตร์ ในปัจจุบันเป็นคณิตศาสตร์ที่ยึดโยงกับ โครงสร้างนามธรรมที่ถูกกำหนดขึ้นผ่านทางกลุ่มของ สัจพจน์ และอาศัยการให้เหตุผลที่รัดกุมโดยใช้ ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ และ สัญกรณ์คณิตศาสตร์

โครงสร้างต่าง ๆ ที่นักคณิตศาสตร์สนใจและพิจารณานั้น มักจะมีต้นกำเนิดจาก วิทยาศาสตร์ธรรมชาติ และ สังคมศาสตร์ โดยเฉพาะ ฟิสิกส์ และ เศรษฐศาสตร์ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ยังเกี่ยวข้องกับการประยุกต์ใช้ในสาขา วิทยาการคอมพิวเตอร์ และ ทฤษฎีการสื่อสาร อีกด้วย

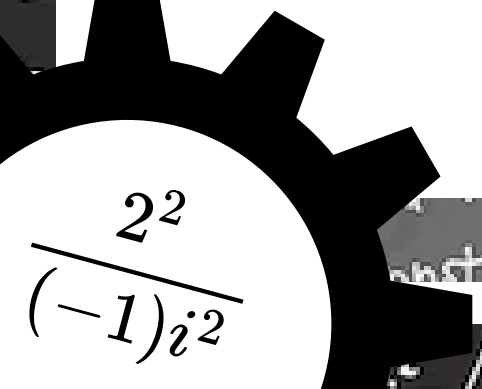
$$\frac{\sqrt[2]{4a^4b^8c^5}}{a^2b^4c^2\sqrt[2]{c}}$$

เนื่องจากคณิตศาสตร์นั้นใช้ ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ และ สัญกรณ์คณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้กิจกรรมทุกอย่างกระทำผ่านทางขั้นตอนที่ชัดเจน เราจึงสามารถพิจารณาคณิตศาสตร์ว่า เป็นระบบภาษาที่เพิ่มความแม่นยำและชัดเจนให้กับภาษาธรรมชาติ ผ่านทางศัพท์และไวยากรณ์บางอย่าง สำหรับการอธิบายและศึกษาความสัมพันธ์ทั้งทางกายภาพและนามธรรม ความหมายของคณิตศาสตร์นั้นยังมีอีกหลายมุมมอง ซึ่งหลายอันถูกกล่าวถึงในบทความเกี่ยวกับปรัชญาของคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์ยังถูกจัดว่าเป็นศาสตร์ สัมบูรณ์ โดยไม่จำเป็นต้องมีการอ้างถึงใด ๆ จากโลกภายนอก นักคณิตศาสตร์ กำหนดและพิจารณาโครงสร้างบางประเภท สำหรับใช้ในคณิตศาสตร์เองโดยเฉพาะ เนื่องจากโครงสร้างเหล่านี้ อาจทำให้สามารถอธิบายสาขาย่อย ๆ หลาย ๆ สาขาได้ในภาพรวม หรือเป็นประโยชน์ในการคำนวณพื้นฐาน



เรื่องที่ 2
จุดมุ่งหมายของคณิตศาสตร์

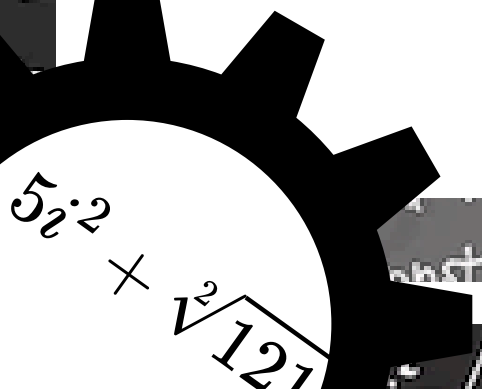


คณิตศาสตร์มีจุดเริ่มต้นจากปัญหาจำนวนมากที่หลากหลาย ในยุคแรกเริ่มคณิตศาสตร์มาจากความจำเป็นเพื่อการค้า การรังวัดที่ดิน สถาปัตยกรรมศาสตร์และดาราศาสตร์ ในขณะที่ปัจจุบัน วิทยาศาสตร์เป็นสาขาสำคัญที่เสนอปัญหาและนำไปสู่การค้นคว้าหัวข้อใหม่ ๆ สำหรับนักคณิตศาสตร์ ทั้งนี้ยังไม่รวมถึงข้อปัญหาที่เกิดขึ้นจากการศึกษาคณิตศาสตร์ในตัวมันเองของนักคณิตศาสตร์ด้วย

ความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ ผ่านทางการวิจัยและการประยุกต์ใช้ คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมืออันหนึ่งของวิทยาศาสตร์ อย่างไรก็ตาม การคิดค้นทางคณิตศาสตร์ไม่จำเป็นต้องมีเป้าหมายอยู่ที่การนำไปใช้ทางวิทยาศาสตร์

นอกจากนี้ นักคณิตศาสตร์หลายคนก็ทำงานเพื่อเป้าหมายเชิงสุนทรียภาพเท่านั้น โดยมองว่าคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์เชิง ศิลปะ มากกว่าที่จะเป็นศาสตร์เพื่อการนำไปประยุกต์ใช้แรงผลักดันในการทำงานเช่นนี้ มีลักษณะไม่ต่างไปจากที่ กวี และ นักปรัชญา ได้ประสบ และเป็นสิ่งที่ไม่สามารถอธิบายได้ อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นราชินีของวิทยาศาสตร์ ในหนังสือ Ideas and Opinions ของเขา

เรื่องที่ 3
สาขาหลักๆของคณิตศาสตร์



1.คณิตศาสตร์บริสุทธิ์

คณิตศาสตร์บริสุทธิ์คือคณิตศาสตร์ที่ศึกษาโครงสร้างนามธรรมโดยไม่จำเป็นต้องยึดโยงกับหลักข้อเท็จจริงของธรรมชาติ โดยจะมีสาขาแตกแขนงออกไปได้อีกมากมาย เช่น

> ปริมาณ ระบบจำนวนและทฤษฎีจำนวน : ศึกษาโครงสร้างของจำนวนทางคณิตศาสตร์

$1, 2, 3$	$-2, -1, 0, 1, 2$	$-2, \frac{2}{3}, 1.21$	$-e, \sqrt{2}, 3, \pi$	$2, i, -2+3i, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega$
จำนวนธรรมชาติ	จำนวนเต็ม	จำนวนตรรกยะ	จำนวนจริง	จำนวนเชิงซ้อน	จำนวนเชิงการนับ

$50\% \times \frac{7}{0.5}$

> โครงสร้าง : ศึกษาขนาดและความสมมาตรของจำนวนและวัตถุทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ



พีชคณิตนามธรรม - ทฤษฎีจำนวน - ทฤษฎีกรุป - ทอพอโลยี - พีชคณิตเชิงเส้น - ทฤษฎีแคทิกอรี - ทฤษฎีอันดับ

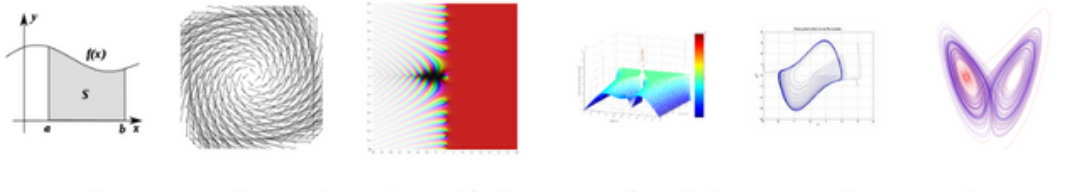
> ปริภูมิ : ศึกษาเกี่ยวกับรูปร่างและรูปทรงต่างๆ



ทอพอลอยี - เรขาคณิต - ตรีโกณมิติ - เรขาคณิตเชิงพีชคณิต - เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ - ทอพอโลยีเชิงอนุพันธ์ - ทอพอโลยีเชิงพีชคณิต - พีชคณิตเชิงเส้น - เรขาคณิตสาทิสรูป

$\left(2\sqrt[2]{2}\right)^{2sin90^{o}}$

> ความเปลี่ยนแปลง : ศึกษาเกี่ยวกับการวัดความเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ และความเปลี่ยนแปลงระหว่างจำนวน



แคลคูลัส แคลคูลัสเวกเตอร์ การวิเคราะห์เชิงซ้อน สมการเชิงอนุพันธ์ ระบบพลวัต ทฤษฎีความอลวน

แคลคูลัส - แคลคูลัสเวกเตอร์ - คณิตวิเคราะห์ - การวิเคราะห์เชิงจริง - การวิเคราะห์เชิงซ้อน - ทฤษฎีเมเชอร์ - การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน - การวิเคราะห์ฟูริเยร์ - สมการเชิงอนุพันธ์ - ระบบพลวัติ - ทฤษฎีความอลวน - รายการฟังก์ชัน

> วิยุตคณิต : แขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่สนใจวัตถุที่มีค่าเฉพาะเจาะจงที่แตกต่างกัน



คณิตศาสตร์เชิงการจัด ทฤษฎีการคำนวณ วิทยาการเข้ารหัสลับ ทฤษฎีกราฟ

คณิตศาสตร์เชิงการจัด - ทฤษฎีการคำนวณ - วิทยาการเข้ารหัสลับ - ทฤษฎีกราฟ

$$\frac{(5^4 - 598)\tan 30^\circ}{\sqrt[2]{3}}$$

2.คณิตศาสตร์ประยุกต์

คณิตศาสตร์ประยุกต์ คือ คณิตศาสตร์ที่นำความรู้ที่ศึกษาได้ในคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ เชื่อมโยงเข้ากับโลกแห่งความเป็นจริง ยกตัวอย่างเช่น



ฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ กลศาสตร์ของไหล การวิเคราะห์เชิงตัวเลข การหาค่าเหมาะที่สุด ความน่าจะเป็น

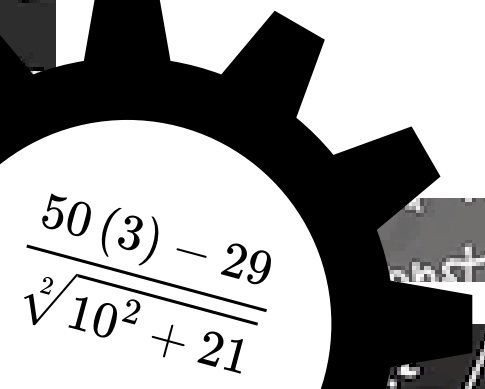


สถิติศาสตร์ คณิตศาสตร์การเงิน ทฤษฎีเกม ทฤษฎีระบบควบคุม

คณิตศาสตร์ฟิสิกส์ - กลศาสตร์ - กลศาสตร์ของไหล - การวิเคราะห์เชิงตัวเลข - การหาค่าเหมาะที่สุด - ความน่าจะเป็น - สถิติศาสตร์ - คณิตศาสตร์การเงิน - ทฤษฎีเกม - คณิตศาสตร์ชีววิทยา - วิทยาการเข้ารหัสลับ - ทฤษฎีข้อมูล - ทฤษฎีระบบควบคุม

$$\frac{\tan^2 60}{0.3}$$

เรื่องที่ 4
สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์

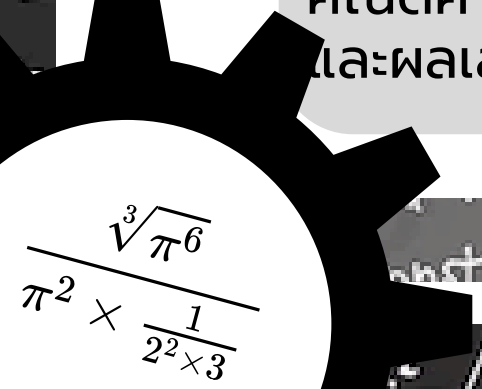


1.ความสามารถในการแก้ปัญหา

ผู้ที่มีความสามารถในทางคณิตศาสตร์ ย่อมต้องมีทักษะการแก้ปัญหาอันเป็นหัวใจหลักในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีนับไม่ถ้วน การใช้สมองและตรรกะในการคิดวิเคราะห์และคิดคำนวณเพื่อแก้ปัญหา จึงสำคัญมากในคณิตศาสตร์

2.ความสามารถในการให้เหตุผล

คณิตศาสตร์ เปรียบเสมือนสาขาหนึ่งในวิทยาศาสตร์ ที่ศึกษาโครงสร้างนามธรรม ที่ถูกกำหนดขึ้นโดยกลุ่มสัจพจน์ และสัญกรณ์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น ข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ย่อมต้องมีเหตุและผลเสมอ การให้เหตุผลที่รัดกุมจึงสำคัญมากในคณิตศาสตร์



3.ความสามารถในการสื่อสารคณิตศาสตร์

ในการนำเสนองาน หรือแนวคิดใหม่ๆทางด้านคณิตศาสตร์ ย่อมต้องมีทักษะในการนำเสนอและสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ผู้ฟังสามารถซึมซับความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้ดีและมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น อีกทั้งยังทำให้ข้อมูลที่นำเสนอมีความน่าสนใจยิ่งขึ้นอีกด้วย

4.ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์

ความรู้ทางคณิตศาสตร์ จะมีประโยชน์ก็ต่อเมื่อคณิตศาสตร์ สามารถเชื่อมโยงเข้ากับชีวิตประจำวันได้ ดังนั้น ผู้ที่มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์เข้ากับชีวิตประจำวัน เช่น ในทางการเงิน ในทางวิทยาศาสตร์ หรืออื่นๆ จะมีเป้าหมายในการศึกษาคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น

$$\frac{11+3\,(5)}{2cos0^{o}}$$

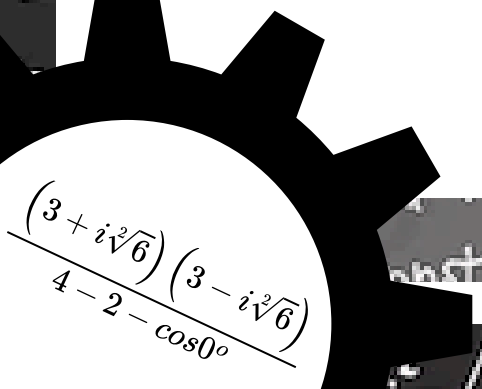
5.ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

วิทยาศาสตร์ ศึกษาธรรมชาติในเชิงรูปธรรม ผ่านการสังเกตและการทดลอง ด้วยความสงสัยที่ไม่มีวันหมดของมนุษย์ทำให้วิทยาศาสตร์เปิดโลกการศึกษาในแขนงต่างๆออกไปเรื่อยๆไม่มีที่สิ้นสุด เช่นเดียวกับคณิตศาสตร์ ที่อยู่คนละโลกกับคณิตศาสตร์ คือศึกษาส่วนที่เป็นนามธรรม แต่ก็ใช่ว่าจะต่างกันมากเสียทีเดียว เราไม่สามารถสัมผัสคณิตศาสตร์ด้วยประสาทสัมผัสทั้ง 5 ได้ เนื่องจากมันอยู่ในความคิดของมนุษย์ ความคิดที่ไม่มีวันสิ้นสุดของมนุษย์นี่เอง จะเปิดโลกคณิตศาสตร์ให้กว้างออกไปเรื่อยๆ การศึกษาทางคณิตศาสตร์ จึงย่อมมาจากความคิดริเริ่มสร้างสรรค์นั่นเอง ตามคำพูดของไอน์สไตน์ที่กล่าวว่า

“จินตนาการ สำคัญกว่า ความรู้”

$$\frac{log10^4 + log10^{10}}{(-log0)cos180^o}$$

เรื่องที่ 5
นักคณิตศาสตร์และสมบัติการเป็นนักคณิตศาสตร์





นักคณิตศาสตร์

คือบุคคลที่ศึกษาและทำงานวิจัยเกี่ยวกับคณิตศาสตร์เพื่อค้นคว้าความรู้ใหม่เพื่อการนำไปใช้ประโยชน์ในด้านต่าง ๆ เชื่อหรือไม่ว่า กว่าจะเป็นสูตร นิยาม ทฤษฎี สมการ ทางคณิตศาสตร์ที่เราใช้กันอยู่ทุกวันนี้มีที่มาที่ไปอันเกิดจากความรู้ความสามารถของนักคณิตศาสตร์หลาย ๆ ท่าน









สมบัติที่นักคณิตศาสตร์ต้องมี

1.ชื่นชอบ สนใจ และหลงใหลเรื่องเกี่ยวกับตัวเลขและการคำนวณ

2.มักให้เวลาและความสำคัญกับการคิด วิเคราะห์ ฝึกฝน ในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.เป็นผู้มีหลักการ ใช้หลักเหตุและผลนำทางเสมอ

4.เป็นคนช่างคิด มีจินตนาการ รู้จักสังเกต มีไหวพริบ คิดเร็ว จับประเด็นได้รวดเร็ว

5เป็นคนชอบโยงความสัมพันธ์ โครงสร้าง และความสมดุลในเรื่องต่าง ๆ

6.ชอบกิจกรรมในเรื่องราวที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ เช่น การจัดลำดับ คัดแยก จับกลุ่ม จัดหมวดหมู่ ชั่ง ตวง วัด

7.สนใจเรื่องนามธรรมและการประยุกต์ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ เช่น เวลา อากาศ สถิติ มิติ เป็นต้น

8.ชอบความท้าทาย การแข่งขัน การทดสอบ

9.ชอบตั้งคำถาม ตั้งข้อสงสัย สร้างเงื่อนไขและตัวแปร

10.ชอบการตั้งสมมติฐาน การพิสูจน์ และการวิจัย

$$\frac{4+3.5+1}{0.4+0.1}$$

จิตนิสัยทางคณิตศาสตร์

ความเข้าใจคณิตศาสตร์ในรูปแบบที่คณิตศาสตร์เป็น จึงเปรียบเสมือนสะพานเชื่อมโยงความคิดและมุมมองระหว่างผู้ใช้และผู้เรียนคณิตศาสตร์กับนักคณิตศาสตร์ จิตนิสัยทางคณิตศาสตร์จึงเป็นสิ่งที่ทั้งนักวิชาการด้านคณิตศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจที่จะใช้เป็นเครื่องมือสำหรับพัฒนาให้ผู้เรียนมีวิธีการคิดเยี่ยงนักคณิตศาสตร์

จิตนิสัยทางคณิตศาสตร์ เป็นคำที่ถูกนำมาใช้เป็นครั้งแรกโดย Cuoco, Goldenberg, and Mark (1996) ซึ่งได้เสนอว่า จิตนิสัยทางคณิตศาสตร์เป็นหลักการสำคัญของการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนระดับมัธยมศึกษาและวิทยาลัยได้ทำความเข้าใจคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการคิดแบบนักคณิตศาสตร์จึงเป็นส่วนที่เติมเต็มช่องว่างระหว่างผู้สร้างกับผู้ใช้คณิตศาสตร์

$$2\left(\frac{\sqrt[2]{27}}{3}\right)^4$$

คุณลักษณะของการมีจิตนิสัยทางคณิตศาสตร์

1.สามารถเข้าใจกรณีทั่วไปได้โดยใช้กรณีตัวอย่างหลายกรณี โดยการนำหลักการใหญ่ที่มักเป็นนามธรรมเพื่อให้เห็นภาพและเข้าใจด้วยตัวอย่างที่เป็นรูปธรรม

2.คิดพิจารณาจากจุดเล็ก ๆ เพื่อนำไปสู่หลักการที่ยิ่งใหญ่ มีบ่อยครั้งที่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้แตกสาขาการพัฒนาขึ้นมาใหม่จากการพยายามจะแก้ปัญหาธรรมดา ๆ ตัวอย่างเช่น จงหาผลคูณของจำนวนที่เกิดจากผลรวมของจำนวนกำลังสอง (square number) ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมของจำนวนกำลังสองที่แตกต่างจากจำนวนเดิม

เช่น $13 = 3^2 + 2^2$ และ $5 = 2^2 + 1^2$ (ทั้ง 13 และ 5 ต่างเกิดจากผลบวกของจำนวนกำลังสอง) จะได้ว่า $65 = 13 \times 5 = 16 + 49 = 4^2 + 7^2$

แสดงว่า 65 ซึ่งเกิดจาก 13 คูณกับ 5 ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของจำนวนกำลังสองได้ด้วยการที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะหลักการทางเลขคณิตของจำนวนเต็มเกาส์ (Gaussian integers) ที่แสดงให้เห็นว่า

$(a + bi)(a - bi) = a + b$. เมื่อ I คือรากที่สองของ -1 ดังนั้น จากจำนวนเต็ม 13 และ 5 เราสามารถเขียนได้ว่า $13 = (3 + 2i)(3 - 2i)$ และ $5 = (2 + i)(2 - i)$

จึงได้ว่า $13 \times 5 = (3 + 2i)(3 - 2i) \times (2 + i)(2 - i)$

$= (3 + 2i)(2 + i) \times (3 - 2i)(2 - i)$

$= (4 + 7i) \times (4 - 7i)$

$= 16 + 49$

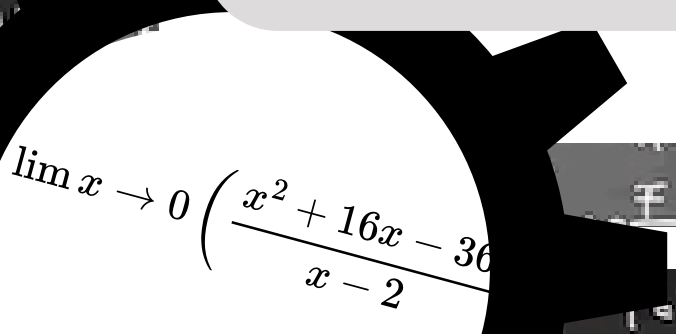
$$\frac{300\%}{\frac{\log 10^3}{\log 10^{19}}}$$

คุณลักษณะของการมีจิตนิสัยทางคณิตศาสตร์

3.รู้จักใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ เพราะความรู้คณิตศาสตร์ที่ค้นพบวันนี้จะกลายเป็นเครื่องมือสำหรับการค้นคว้าต่อไปในอนาคต เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญได้แก่ ขั้นตอนวิธี (Algorithms) การแปรตาม (Dependences) และการส่ง (Mappings)

4.ใช้มุมมองที่หลากหลาย เช่น ในการศึกษาระบบจำนวนเชิงซ้อน จำเป็นต้องอาศัยทั้งมุมมองแบบพีชคณิต การวิเคราะห์ และเรขาคณิต) ประกอบกัน

5.ผสมผสานระหว่างวิธีการนิรนัยกับการทดลองการพิสูจน์ด้วยวิธีนิรนัย ยังเป็นเรื่องที่นักคณิตศาสตร์ศึกษาถกเถียงกันอยู่ว่ามีความจำเป็นหรือไม่ สำหรับการเรียนในโรงเรียนหรือเพิ่มเข้าไปเพียงเพื่อให้เนื้อหาน่าเชื่อถือยิ่งขึ้น เพราะแม้นักคณิตศาสตร์หลายคนจะเชื่อว่าองค์ความรู้คณิตศาสตร์เกิดจากการพิสูจน์และทุกอย่างที่เป็นจริงจะต้องสามารถพิสูจน์ได้ แต่บางครั้งองค์ความรู้ก็สามารถเกิดได้จากการทดลองโดยการสังเกตเห็นบางสิ่งบางอย่าง แล้วมีความสงสัยจนนำมาซึ่งการสรุปเป็นคำอธิบายได้ แต่อย่างน้อยการพิสูจน์และการสร้างคำอธิบายก็สามารถช่วยให้เกิดกระบวนการสืบเสาะหาความรู้ได้ 2 แนวทางคือ ใช้วิธีการพิสูจน์ช่วยยืนยันผลลัพธ์ และ ใช้การพิสูจน์เป็นเครื่องมือในการสร้างทฤษฎีบทใหม่



คุณลักษณะของการมีจิตนิสัยทางคณิตศาสตร์

6.ส่งเสริมการใช้ภาษา เพื่อสร้างคำอธิบาย เช่น นิยามการมีอยู่ของจำนวน 20 ซึ่งในบางครั้งการพบข้อขัดแย้งก็อาจสามารถนำมาซึ่งการสร้างทฤษฎีบทใหม่ ๆ ได้

7.ร่วมกันใช้ปัญญาครุ่นคิด ทั้งแบบร่างลงบนกระดาษและคิดในใจ ซึ่งครูสามารถส่งเสริมได้โดยใช้การสัมภาษณ์นักเรียนคนที่แก้ปัญหาได้สำเร็จโดยอาจขอให้อธิบายและเขียนวิธีการที่ใช้แก้ปัญหา

8.ใช้วิธีการทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหา ความคิดแนวเรขาคณิตได้มีบทบาทสำคัญต่อคณิตศาสตร์ทุกสาขามาโดยตลอดมุมมองเชิงเรขาคณิตจะช่วยสร้างความเข้าใจที่ถูกต้องในการค้นพบใหม่ ๆ อาทิใช้ในการวิเคราะห์เชิงซ้อน (complex analysis)

9.ใช้วิธีการทางพีชคณิตในการแก้ปัญหา อาทิ ใช้เป็นเครื่องมือคำนวณที่ดี ใช้แปลงให้อยู่ในสภาพนามธรรม ใช้เป็นขั้นตอนวิธี ใช้แบ่งเป็นส่วนย่อยใช้ขยาย และใช้เป็นตัวแทน